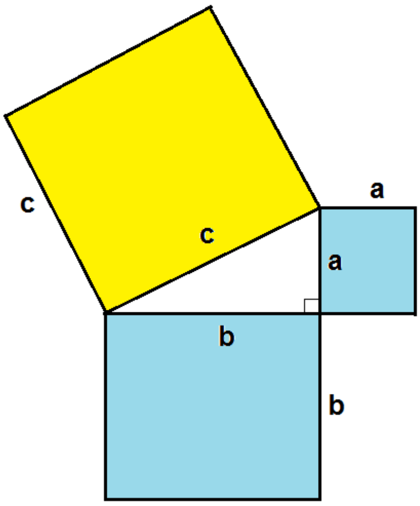
www.AnticoPedie.fr

Cékoistruc n° 18 :

Reconnaissez le sens de cette figure, et démontrez ce qu'elle évoque …
ou « pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ? »



Vous avez peut-être reconnu, sous sa forme graphique, l'exposé du théorème de Pythagore, mathématicien grec qui vécut de 580 à 495 av. J.-C. environ :

Dans le triangle rectangle en blanc ci-dessus, le carré de l'hypoténuse (côté *c*) est égale à la somme des carrés des autres côtés *a* et *b*, soit $c^2=a^2+b^2$

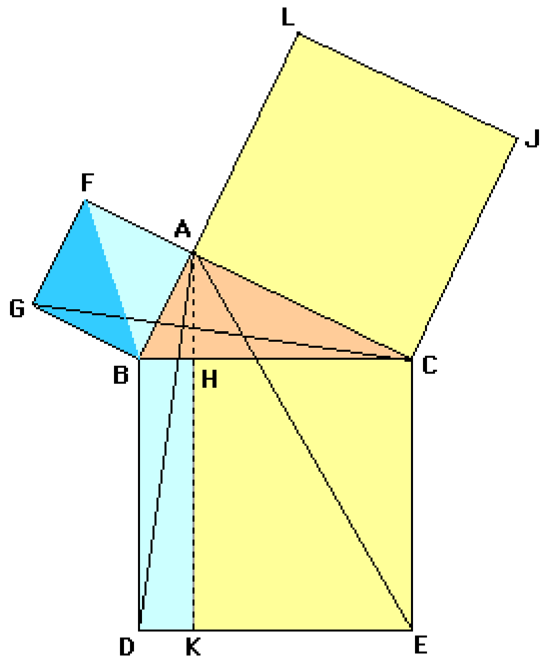
Ceci signifie que, sur cette figure, la surface du carré jaune est égale à la somme des surfaces des carrés bleus. Saurez-vous en convaincre un élève de 6ème en moins de 2 minutes ?

Faisons une petite pause, et tâchez d'y parvenir avant de passer à la page suivante.

Voici d'abord la démonstration qu'élabore Euclide dans ses « Eléments » (premier livre)

On sait peu de chose sur la vie d'Euclide, si ce n'est qu'il vécut dans les années 300 av. J.-C.

Sa démonstration est peut-être fort ingénieuse mais elle n'en est pas moins plutôt alambiquée, et si elle vous donne la migraine, croyez-le sur parole et passez directement à la page suivante !



Tout d'abord, rappelons tout de même que la surface d'un triangle est donnée par la formule $S = \frac{\text{base x hauteur}}{2}$

Allons-y, en tâchant de faire court.

- Les triangles **FGB** et **GBC** ont la même surface : ils ont un côté commun BG et la même hauteur relative à ce côté : FG (ou AB).
- D'autre part les triangles **GBC** et **ABD** sont égaux car ils ont un angle égal (en B) compris entre deux côtés égaux (BG= BA et BC=BD).
- Enfin, la surface du triangle **ABD** est égale à BD x DK /2, alors que celle du rectangle bleu clair BDKH est BD x DK, soit le double.

En résumé, la surface du rectangle BDKH est égale à

- 2 fois celle du triangle ABD,
- soit 2 fois celle du triangle GBC (puisque ABD=GBC)
- soit 2 fois celle du triangle FGB (puisque GBC=FGB)
- soit celle du carré ABGF = AB^2 (puisque FGB=ABF)

On en déduit que a^2 = surface du rectangle BDKH

Avec le même raisonnement, on peut établir que b^2 = surface du rectangle HKEC.

Conclusion :

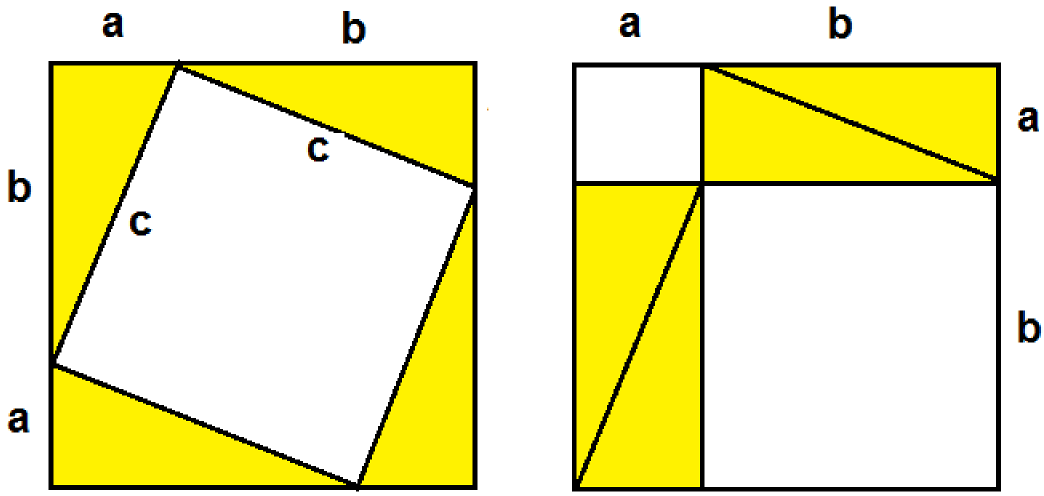
a^2+b^2= surface du rectangle BDKH + surface du rectangle HKEC, donc $a^2+b^2 = c^2$

Bon, vous avez suivi ? Sinon, ce n'est pas grave car…

…il y a tout de même beaucoup, beaucoup plus simple

Au point qu'on peut se demander si Euclide n'aimait pas compliquer les choses à plaisir.

Car voici 2 carrés dont le côté vaut **a+b :** ils ont donc la même surface $(a+b)^2$



On distingue, sur chacun de ces carrés, 4 triangles rectangles jaunes qui ont pour côtés a et b, et sont donc tous de même surface.

Si on les déduit de la surface du carré initial, que reste-t-il ? A gauche, un carré de surface c^2, à droite deux carrés de surface respective a^2 et b^2

Et donc, ô miracle, $c^2 = a^2 + b^2$

Pour les matheux pur sang, on voit aussi que la surface du carré de droite peut s'exprimer par $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ab étant la surface de chaque rectangle jaune), ce qui leur rappellera quelque chose…